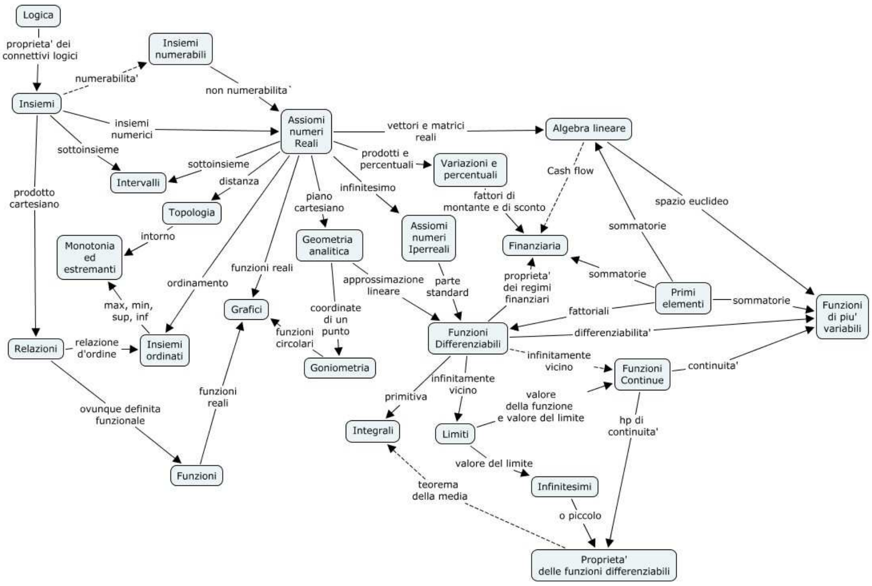
Mappa degli argomenti



Definizione 4 *(Combinazioni)*

Sia dato un insieme $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *di* n *oggetti distinti. Se consideriamo diversi due allineamenti formati da* $1 \leq r \leq n$ *oggetti scelti tra gli* n*, quando*

- *contengono elementi differenti*

allora ciascun allineamento è detto combinazione di classe r di n oggetti*.*

Proprietà 7

Il numero di combinazioni di classe r *di* n *oggetti è dato da*

$$C_{n,r} = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Chiameremo x la coordinata del punto P_x sull'asse Ox, e y la coordinata del punto P_y sull'asse Oy. I numeri x e y sono dette *coordinate cartesiane* del punto P che verrà indicato $P(x, y)$.

Osservazione 1 *Si è visto come la determinazione delle coordinate nel piano del punto P si riconduca alla determinazione delle coordinate di due punti P_x e P_y su due assi numerici.*

Definizione 1

- *La coordinata x del punto P_x si chiama* ascissa *del punto P*
- *La coordinata y del punto P_y si chiama* ordinata *del punto P.*

Osservazione 2

- *Se un punto P giace sull'asse Ox allora la sua ordinata è nulla*
- *Se un punto P giace sull'asse Oy allora la sua ascissa è nulla*
- *L'origine degli assi O ha entrambe le coordinate nulle.*

Angoli e loro misura

Definizione 1 *Dato un piano, su di esso si considerino due semirette uscenti da uno stesso punto O. Si chiama* angolo *ciascuna delle due parti (incluse le due semirette) in cui il piano risulta diviso.*

Definizione 2 *(Misura pratica degli angoli)*

Definiamo il grado *come novantesima parte dell'angolo retto; la sessantesima parte del grado viene detta* minuto primo *e la sessantesima parte di un minuto primo viene detta* minuto secondo*.*

Definizione 3 *(Angolo Radiante)*

L'angolo al centro di una circonferenza di raggio unitario che sottende un arco di lunghezza eguale a quella del suo raggio viene detto angolo radiante*.*

si ha:

$$360 : 2\pi = \varphi : l$$

Dalla proposizione precedente si ricavano la formula

$$l = \frac{\pi}{180}\varphi$$

che permette di passare dalla misura in gradi alla misura in radianti, e la formula

$$\varphi = \frac{180}{\pi}l$$

che permette di passare dalla misura in radianti alla misura in gradi.

Angoli orientati

Definizione 4 *Un angolo viene detto* orientato *quando i suoi lati sono considerati in un determinato ordine, cioè quando è stabilito quale dei suoi lati si debba considerare come primo lato e, di conseguenza, quale come secondo.*

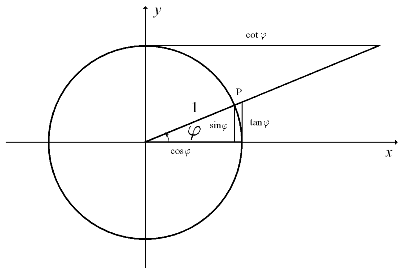
Definizione 5 *L'angolo orientato* $\hat{ab}$ *di vertice* O*, viene detto* positivo *quando il secondo lato è descritto a partire dal lato origine mediante una rotazione positiva attorno al punto* O *(cioè secondo il verso antiorario); viceversa viene detto* negativo *quando il secondo lato è descritto a partire dal lato origine mediante una rotazione negativa attorno al punto* O *(cioè secondo il verso orario).*

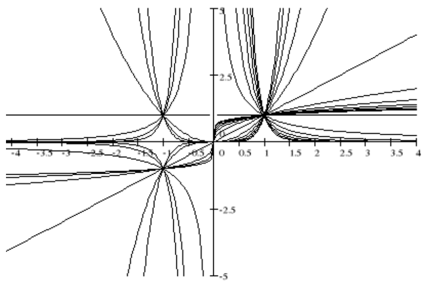
Nota 2 *La misura di un angolo orientato* $\hat{ab}$ *è positiva o negativa a seconda che l'angolo sia positivo o negativo.*

Definizione 6 *(Cotangente)*

Dato un angolo orientato φ, si considerino il riferimento cartesiano associato ad esso e la circonferenza goniometrica. Detto P il punto intersezione della circonferenza goniometrica con il secondo lato dello angolo, chiamiamo cotangente *di φ il rapporto tra l'ascissa e l'ordinata del punto P, quando quest'ultima non è nulla.*

$$\cot\varphi := \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$





$$y = x^a; \qquad a = \pm n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad a = \pm\tfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Teorema 2 *Siano A e B due insiemi inclusi in un insieme universo Ω allora:*

$$A \backslash B = A \cap \bar{B}$$

Teorema 3 *Siano A,B e C tre insiemi, si ha:*

$$\begin{array}{ll} A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ A \cup A = A & A \cap A = A \end{array}$$

Teorema 4 *Siano A e B due insiemi inclusi in un insieme universo Ω allora :*

$$\begin{array}{ll} \overline{\overline{A}} = A & A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \supseteq \overline{B} \\ A \cup \overline{A} = \Omega & A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} & \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}$$

Definizione 4 *Un punto a dell'insieme A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, viene detto* punto interno *di A se esiste un suo intorno circolare interamente contenuto in A.*

L'insieme $\mathring{A}$ costituito dai punti interni di A viene detto interno *di A.*

Definizione 5 *Un punto r dell'insieme $\mathbb{R}$ viene detto* punto esterno *di A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se esiste un suo intorno circolare avente intersezione vuota con A.*

L'insieme $\mathrm{Ex}A$ dei punti esterni di A viene detto esterno *di A.*

Definizione 6 *Dato A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, un punto di r di $\mathbb{R}$ si dice* punto di frontiera *per A se rispetto a tale insieme esso non è né interno né esterno.*

L'insieme $\mathrm{Fr}A$ dei punti di frontiera di A viene detto frontiera *di A.*

Definizione 7 *Un insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *si dice* aperto *se tutti i suoi punti sono interni.*

Definizione 8 *Un insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *si dice* chiuso *se è il complementare di un aperto.*

Definizione 9 *Punto isolato*

Un punto $a \in A$*, dove* $A \subseteq \mathbb{R}$*, viene detto* punto isolato *di* A *se:*

$$\exists \quad \mathcal{U}(a,r) : \mathcal{U}(a,r) \cap A = \{a\}$$

Definizione 10 *Punto di accumulazione*

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$*, un punto* $a \in \mathbb{R}$ *si dice* punto di accumulazione *se ogni suo intorno circolare contiene infiniti punti di* A*.*

Assioma 2 *(Assiomi ordinali per i numeri reali)*

1. $0 < 1$
2. *LEGGE TRANSITIVA:* $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \;\; a < b, \;\; b < c \;\Rightarrow a < c.$
3. *LEGGE DI TRICOTOMIA:* $\forall a,b \in \mathbb{R}$
   vale una e una sola delle relazioni $a < b$ *,* $a = b$ *e* $b < a$*.*
4. *LEGGE DELLA SOMMA:*
   $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \qquad a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c.$
5. *LEGGE DEL PRODOTTO:*
   $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, c > 0 \qquad a < b \quad \Rightarrow \quad ac < bc.$

Assioma 3 *(DELLA RADICE)*

$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 0 \qquad \exists\; b \in \mathbb{R}, b \geq 0 \;:\; b^n = a.$

Assioma 4 *(archimedeo)*

$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists n \in \mathbb{N}, n > 0 \;:\; a < n.$

Assioma 2 *(Assiomi ordinali per i numeri reali)*

1. $0 < 1$
2. *LEGGE TRANSITIVA: Se* $a < b$ *e* $b < c$ *allora* $a < c$ *.*
3. *LEGGE DI TRICOTOMIA:*
   Vale una e una sola delle relazioni $a < b$ *,* $a = b$ *e* $b < a$*.*
4. *LEGGE DELLA SOMMA: Se* $a < b$ *allora* $a + c < b + c$*.*
5. *LEGGE DEL PRODOTTO: Se* $a < b$ *e* $c > 0$ *allora* $ac < bc$*.*

Assioma 3 *(DELLA RADICE) Per ogni numero reale non negativo ed ogni intero positivo* n*, esiste un numero reale non negativo* b*, tale che* $b^n = a$*.*

Assioma 4 *(archimedeo)*

Per ogni numero reale a *esiste un intero positivo* n *tale che* $a < n$*.*

Dimostrazione

- Se $\Delta x = 0$, allora $\Delta y = 0$ e qualunque ε finito andrebbe bene, in particolare $\varepsilon = 0$.
- Se $\Delta x \neq 0$, poniamo

  $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\bar{x})$$

  ε è infinitesimo in quanto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(\bar{x})$, inoltre, moltiplicando per Δx, si ottiene

  $$\varepsilon \Delta x = \Delta y - f'(\bar{x}) \Delta x$$

  Ora, essendo $\mathrm{d}y := f'(\bar{x}) \Delta x$, si ha $\varepsilon \Delta x = \Delta y - \mathrm{d}y$.

  Segue la tesi. $\square$

  Nota 3 *Il teorema dell'incremento dice che la differenza tra* Δy *e* $\mathrm{d}y$ *è infinitamente piccola anche in confronto all'infinitesimo* Δx*.*

Limiti infiniti

Definizione 6 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *e sia* $\bar{x}$ *un punto interno di* I*. Se*

$$\forall x \approx \bar{x}, x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \text{ \emph{è infinito positivo.}}$$

allora si dice che $+\infty$ *è il* limite *di* $f(x)$ *per* x *che tende a* $\bar{x}$ *e si scrive:*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty$$

Definizione 7 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *e sia* $\bar{x}$ *un punto interno di* I*. Se*

$$\forall x \approx \bar{x}, x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \text{ \emph{è infinito negativo.}}$$

allora si dice che $-\infty$ *è il* limite *di* $f(x)$ *per* x *che tende a* $\bar{x}$ *e si scrive:*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = -\infty$$

Asintoto obliquo sinistro

Nel caso in cui

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ finito e non nullo} \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q \text{ finito}$$

Si dice che la retta

$$y = mx + q$$

è un *asintoto sinistro* del grafico di f.

Asintoto obliquo destro

Nel caso in cui

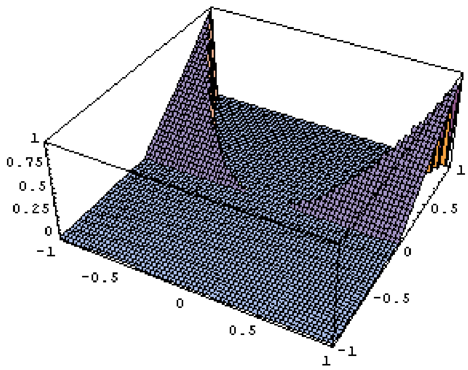
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ finito e non nullo} \quad \wedge \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \text{ finito}$$

Si dice che la retta

$$y = mx + q$$

è un *asintoto destro* del grafico di f.

Controesempio 4 *Una funzione f differenziabile in $\mathbf{x}$ non ha necessariamente derivate parziali continue in $\mathbf{x}$.*



$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & se \quad x_2 < 0 \vee x_2 > x_1^2 \\ x_2 & se \quad 0 \le x_2 \le x_1^2 \end{cases}$$

il rendimento nel periodo da 0 a t è:

$$r'' = \frac{A' - A}{At} = \frac{\frac{N}{1+r'(T-t)} - \frac{N}{1+rT}}{\frac{N}{1+rT}t}$$

da cui:

$$r'' = \frac{rT - r'(T-t)}{t\left[1 + r'(T-t)\right]}$$

Nota 4 *Se il rendimento del tasso in ingresso ed in uscita sono uguali $r = r'$, il rendimento r'' realizzato attraverso le operazioni di acquisto e vendita risulta inferiore ad r:*

$$r'' = \frac{r}{1 + r(T-t)} < r$$

Il criterio del Payback time

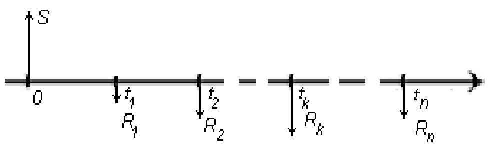
Si consideri una operazione finanziaria avente un flusso negativo iniziale. Si definisce *tempo di recupero* la scadenza in cui i saldi di cassa diventano positivi. Si sceglie l'operazione che ha tempo di recupero inferiore.

Nota 6 *Alcuni definiscono il tempo di recupero come la scadenza in cui i saldi di cassa diventano* definitivamente *positivi.*

Osservazione 2 *Questo metodo soffre di numerose problematiche che, nonostante i tentativi di riformulazione, lo rendono inutilizzabile dalle persone di buonsenso.*

Piani d'ammortamento

A fronte del prestito d'ammontare S ci si impegni a pagare le somme di denaro, dette *rate d'ammortamento* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ alle scadenze rispettive $t_1, t_2, \ldots, t_n$.



Si calcoli il DCF dal punto di vista del prestatore:

$$G(x) = -S + \frac{R_1}{(1+x)^{t_1}} + \frac{R_2}{(1+x)^{t_2}} + \cdots + \frac{R_n}{(1+x)^{t_n}}$$

Il *tasso del prestito* x^* si ottiene risolvendo *numericamente*:

$$G(x^*) = 0$$